CAPITOLUL 4

ELEMENTE DE CALCUL VARIAȚIONAL

4.1. Introducere

Calculul variațional se ocupă cu studiul extremelor pentru o clasă specială de funcții numite *funcționale*. Aceste funcționale sunt definite pe submulțimi ale unor spații de funcții obişnuite. Din punct de vedere istoric, contribuții decisive la dezvoltarea calculului variațional au adus Euler (1744), dar mai ales Lagrange (1760) care a dat metodele generale ale disciplinei şi le-a aplicat în mecanică. Vom începe cu prezentarea unor probleme clasice ale calculului variațional.

Curba de cea mai rapidă coborâre (problema brachistocronei). Problema a fost formulată de Johann Bernoulli în 1696. De rezolvarea acestei probleme s-au ocupat frații Johann şi Jacob Bernoulli, Newton, Leibniz, l'Hospital. Originea termenului brachistocronă se află în limba greacă (brakhistos = cel mai scurt, khronos = timp). Prin brachistocronă se înțelege traiectoria pe care un corp care se deplasează între două puncte date, sub acțiunea gravitației, realizează cel mai scurt timp. Aşadar, dintre toate curbele aflate într-un plan vertical şi trecând prin punctele fixe $O(0,0)$ şi $P(a,b)$, cu P mai jos decât O, să se determine acea curbă pentru care timpul de coborâre din O în P a unui punct material greu fără frecare, să fie minim.

Pentru rezolvare, vom orienta axa Oy pe verticală în jos ca în fig. 1.1. Fie $y = y(x)$, $x \in [0,a]$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a,b > 0$, curba căutată. Fie v viteza de deplasare a punctului material, deci $v = \sqrt{2g\,y} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, unde $\mathrm{d}s$ este lungimea arcului OM. Atunci $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g\,y}}$.
Prin urmare dacă T este timpul necesar pentru ca punctul material să ajungă în punctul P, vom avea

$$T = \int_{\overset{\frown}{OP}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g\,y}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2g\,y(x)}}\,\mathrm{d}x .$$

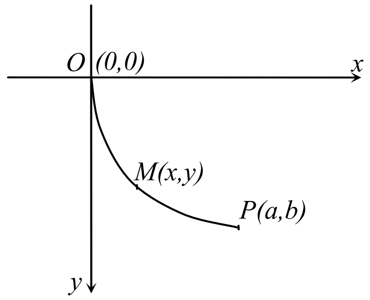

Fig. 1.1

Problema suprafeței de rotație de arie minimă constă în determinarea unei curbe $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, $y(a) = c$, $y(b) = d$, cu proprietatea că aria suprafeței de rotație a graficului în jurul axei Ox este minimă (fig. 1.2). După cum se cunoaşte, expresia acestei arii este

$$A = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x .$$

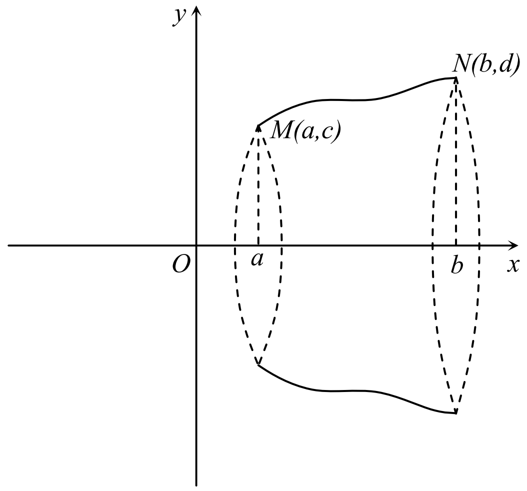

Fig. 1.2

Echilibrul unei membrane deformate. O membrană elastică în stare de repaus are forma domeniului $D \subset xOy$ (fig. 1.3). Fie C frontiera lui D. Deformăm conturul C al membranei în direcția perpendiculară pe planul xOy şi notăm cu $u(x, y)$ deplasarea (deformația) unui punct oarecare $M(x, y) \in D$ (deformarea conturului atrage după sine şi deplasarea punctelor din interiorul membranei). Se cere să se determine poziția de echilibru a membranei când cunoaştem deformarea conturului ei. Aria membranei deformate va fi

$$\iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Dacă deplasările sunt mici, aproximăm această arie cu

$$\iint_D \left(1 + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Rezultă că variația ariei suprafeței deformate este

$$\frac{1}{2}\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Se admite că energia potențială a membranei deformate este proporțională cu creşterea arie sale. Prin urmare energia potențială de deformație E este

$$E = \frac{\mu}{2}\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y , \tag{1}$$

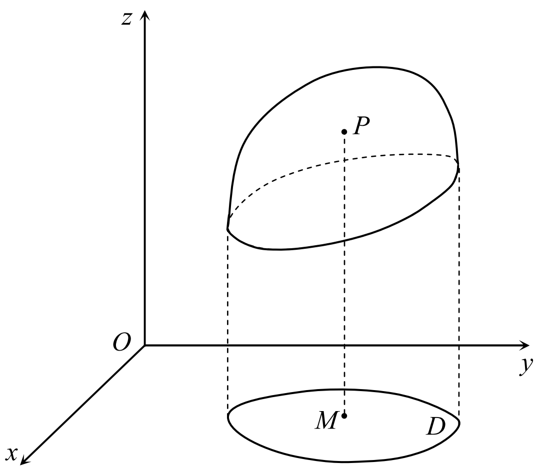

Fig. 1.3

unde μ este o constantă care exprimă calitățile elastice ale membranei. Presupunem că se cunosc deplasările punctelor de pe contur, deci că

$$u\big|_C = \varphi(x,y)\,, \qquad (2)$$

φ fiind o funcție cunoscută.

Poziția de echilibru se realizează când energia potențială este minimă. Se obține astfel următoarea problemă variațională. Dintre toate funcțiile $u \in C^1(D)$ care satisfac condiția (2), să se determine acea funcție pentru care integrala (1) devine minimă.

4.2. Extreme ale funcționalelor. Variația întâi a unei funcționale. Teorema lui Fermat

Pentru început, reamintim câteva noțiuni învățate la cursul de Analiză matematică.

Fie X un spațiu vectorial real.

Definiția 4.2.1. Se numeşte *normă* pe X o funcție $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$, cu proprietățile:

1) $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow x = 0_X$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|,\ \forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in X$;
3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in X$. *(inegalitatea triunghiului)*

Spațiul vectorial X înzestrat cu o normă se numeşte *spațiu vectorial normat*.

Exemple. 1) Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b]$ un interval şi $n \in \mathbb{N}^*$. Spațiul vectorial real $C^n(I;\mathbb{R})$ al funcțiilor $y : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^n, înzestrat cu norma

$$\|y\| = \sup_{x\in I}|y(x)| + \sup_{x\in I}|y'(x)| + \ldots + \sup_{x\in I}\left|y^{(n)}(x)\right|, \qquad (1)$$

este un spațiu vectorial normat. De asemenea, spațiul vectorial real $C^1(I;\mathbb{R}^2)$ al funcțiilor $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(x) = \big((y(x), z(x)\big)$, unde $y, z \in C^1(I;\mathbb{R})$, înzestrat cu norma

$$\|\gamma\| = \sup_{x\in I}\sqrt{y^2(x)+z^2(x)} + \sup_{x\in I}\sqrt{y'^2(x)+z'^2(x)}\,, \qquad (2)$$

este un spațiu vectorial normat.

2) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit de o curbă închisă, netedă pe porțiuni. Spațiul $C^1(\bar{D};\mathbb{R})$ este spațiu vectorial normat în raport cu norma

$$\|z\| = \sup_{(x,y)\in\bar{D}}|z(x,y)| + \sup_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right| + \sup_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right|,\ \forall z \in C^1(\bar{D};\mathbb{R})\,. \qquad (3)$$

Definiția 4.2.2. Fie X un spațiu vectorial normat, $y_0 \in X$ şi $r>0$. Se numeşte *bila deschisă cu centrul în* z_0 *şi de rază* r mulțimea $B(y_0,r) = \{y \in X;\ |y-y_0| < r\}$. Mulțimea $A \subset X$ se numeşte *deschisă* dacă $\forall y \in A$, există $r>0$ astfel încât $B(y,r) \subset A$.

Definiția 4.2.3. Fie $(y_n)_n \subset X$. Şirul $(y_n)_n$ *converge* la $y \in X$ şi se notează $y_n \to y$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$. Şirul $(y_n)_n$ se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă şi numai dacă $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|y_m - y_n\| = 0$. Un spațiu vectorial normat, în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte *spațiu complet* sau *spațiu Banach*.

Observația 4.2.1. Reamintim că pe spațiul $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$, al funcțiilor continue pe $[a,b]$, se poate defini norma Cebâşev:

$$\|g\|_C = \sup\{|g(x)|; x \in [a,b]\}\ ,\ \forall g \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}).$$

Mai mult, spațiul $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ înzestrat cu norma Cebâşev este un spațiu Banach.

Rezultatul se extinde şi pentru spațiul funcțiilor continue pe o mulțime compactă $K \subset \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Cu aceste precizări, norma (1) se mai scrie:

$$\|y\| = \|y\|_C + \|y'\|_C + \ldots + \|y^{(n)}\|_C.$$

De asemenea, normele (2) şi (3) devin

$$\|\gamma\| = \|\gamma\|_C + \|\gamma'\|_C$$

respectiv

$$\|z\| = \|z\|_C + \left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_C + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_C.$$

Este uşor de observat că spațiile vectoriale normate din exemplele 1) şi 2) sunt spații Banach.

Fie X un spațiu vectorial normat. În cele ce urmează, prin *funcțională* pe X înțelegem orice funcție $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}$.

Exemple. Problemele clasice ale calculului variațional prezentate secțiunea 4.1, ne sugerează să considerăm următoarele funcționale.

1) Fie $X = \mathcal{C}^1([0,a];\mathbb{R})$. În cazul problemei brachistocronei, definim pe X *funcționala-timp* $\mathcal{T} : X \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{T}(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\mathrm{d}x\ ,\ \forall y \in X.$$

De asemenea, în cazul problemei suprafeței de rotație de arie minimă, pe $X = \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R})$ putem defini *funcționala-arie* $\mathcal{A} : X \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A}(y) = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x\ ,\ \forall y \in X.$$

Mai general, pe $X = \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R})$ putem considera funcționale de tipul

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x,$$

unde F este o funcție continuă pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, iar y este o funcție oarecare de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $[a,b]$, cu proprietatea că $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$, $\forall x \in [a,b]$.

2) Problema echilibrului unei membrane deformate care ocupă domeniul mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$, ne conduce la considerarea *funcţionalei-energie*

$$\mathcal{E}\,(u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

cunoscută sub numele de *integrala energiei* sau *integrala Dirichlet* a funcţiei $u : D \to \mathbb{R}$.

Mai general, pe $X = \mathcal{C}^{\,1}(D;\mathbb{R})$ putem considera funcţionale de tipul

$$\mathcal{F}\ \ (z) = \int_a^b F(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x}(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

unde F este o funcţie continuă de cinci variabile reale, definită pe mulţimea $\{(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x}(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)) \in \mathbb{R}^5;(x,y) \in D\}$, z fiind o funcţie de clasă $\mathcal{C}^{\,1}$ pe domeniul D.

Definiţia 4.2.4. Fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ şi $\mathcal{F}\ : A \to \mathbb{R}$ o funcţională. Un element $y_0 \in A$ se numeşte punct de *minim local* (respectiv *maxim local*) pentru $\mathcal{F}$, dacă există $r > 0$ astfel încât pentru orice $y \in A$ care satisface $\|y - y_0\| < r$, rezultă $\mathcal{F}\ (y) \geq \mathcal{F}\ (y_0)$ (respectiv $\mathcal{F}\ (y) \leq \mathcal{F}\ (y_0)$). Un punct de minim local sau de maxim local se numeşte punct de *extrem local*. Dacă inegalităţile de mai sus au loc pentru orice $y \in A$, atunci se poate vorbi de punct de *minim global* (respectiv *maxim global*) sau *extrem global*.

În continuare, fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulţime deschisă, $\mathcal{F}\ : A \to \mathbb{R}$ o funcţională, $y_0 \in A$ şi $h \in X$, $h \neq 0_X$, un element fixat. Mulţimea A fiind deschisă, există $r > 0$ astfel încât $B(y_0, r) \subset A$. Dacă $t \in \mathbb{R}$, atunci elementul $y = y_0 + th \in B(y_0, r)$ dacă şi numai dacă $\|y - y_0\| < r$, deci dacă şi numai dacă $|t| < \frac{r}{\|h\|}$. În consecinţă, putem defini funcţia reală

$$\varphi_h : \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}\,,\ \varphi_h(t) = \mathcal{F}\ \ (y_0 + th)\,. \tag{4}$$

Definiţia 4.2.5. Fie X un spaţiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulţime deschisă, $\mathcal{F}\ : A \to \mathbb{R}$ şi $y_0 \in A$. Se spune că $\mathcal{F}$ *admite variaţia întâi în* y_0 *pe direcţia unui vector nenul* $h \in X$, dacă funcţia φ_h dată de (4) este derivabilă în punctul $t = 0$. În acest caz, $\varphi_h'(0)$ se numeşte *variaţia întâi a lui* $\mathcal{F}$ *în* y_0 *pe direcţia lui* h şi se notează cu $\delta_h\mathcal{F}\ (y_0)$.

Vectorul h se numeşte *variaţie* a argumentului funcţionalei $\mathcal{F}$. Un punct $y_0 \in A$ cu proprietatea că $\delta_h\mathcal{F}\ (y_0) = 0$, $\forall h \in X$, se numeşte punct *critic* (*staţionar*) al funcţionalei $\mathcal{F}$.

Prin urmare

$$\delta_h \mathcal{F}(y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_h(t) - \varphi_h(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{F}(y_0 + th) - \mathcal{F}(y_0)}{t}. \tag{5}$$

Dacă $h = 0$, atunci punem $\delta_h \mathcal{F}(y_0) = 0$.

Observația 4.2.2. În particular, fie $X = \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ şi $s = \frac{h}{\|h\|}$ versorul lui h.

Atunci

$$\delta_h \mathcal{F}(y_0) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}s}(y_0),$$

unde $\frac{\mathrm{d}\mathcal{F}}{\mathrm{d}s}(y_0)$ este derivata lui $\mathcal{F}$ după direcția lui s în y_0. Aşadar, noțiunea de variație întâi este o extindere a conceptului de derivată după o direcție.

Ca şi în cazul funcțiilor reale următoarea teoremă furnizează o condiție necesară de extrem.

Teorema 4.2.1. (Teorema lui Fermat). *Fie X un spațiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulțime deschisă şi $\mathcal{F} : A \to \mathbb{R}$ o funcțională. Dacă $y_0 \in A$ este un punct de extrem local pentru $\mathcal{F}$ şi dacă $\mathcal{F}$ admite variația întâi în y_0 pe orice direcție, atunci y_0 este punct critic al lui $\mathcal{F}$, adică*

$$\delta_h \mathcal{F}(y_0) = 0,\ \forall h \in X. \tag{6}$$

Demonstrație. Egalitatea (6) este evidentă pentru $h = 0_X$. Să presupunem acum că $h \neq 0_X$ şi că y_0 este punct de minim local, în cazul în care y_0 este punct de maxim local raționamentul fiind similar. Conform definiției, există $r > 0$ astfel încât pentru orice $y \in A \cap B(y_0, r)$ are loc $\mathcal{F}(y) \geq \mathcal{F}(y_0)$. Mulțimea A fiind deschisă, putem alege $r > 0$ suficient de mic astfel încât $B(y_0, r) \subset A$. Aşadar, pentru orice $y \in B(y_0, r)$ avem $\mathcal{F}(y) \geq \mathcal{F}(y_0)$. Deoarece pentru $|t| < \frac{r}{\|h\|}$, $y = y_0 + th \in B(y_0, r)$, rezultă că pentru orice $t \in \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right)$ are loc inegalitatea $\mathcal{F}(y_0 + th) \geq \mathcal{F}(y_0)$ care, ținând seama de (4), se mai poate scrie sub forma $\varphi_h(t) \geq \varphi_h(0)$, $\forall t \in \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right)$. Conform teoremei clasice a lui Fermat pentru funcții de o variabilă reală, rezultă că $\varphi_h'(0) = 0$ sau, echivalent, $\delta_h \mathcal{F}(y_0) = 0$. ■

În cele ce urmează, vom aborda problema determinării punctelor critice (staționare) pentru funcționale concrete.

4.3. Funcționale de tipul $\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$

Fie $D\subset\mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă , $F:D\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. De asemenea, fie

$$\mathcal{D}=\{y\in\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})\ \big|\ \big(x,y(x),y'(x)\big)\in D,\ \forall x\in I\},$$

Considerăm funcționala $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x,\ \forall y\in\mathcal{D}\ . \tag{1}$$

Această funcțională depinde de F.

Lema 4.3.1. *Mulțimea $\mathcal{D}$ este deschisă în spațiul Banach $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$.*

Demonstrație. Fie $y_0\in\mathcal{D}$ oarecare. Cum funcția vectorială

$$x\to(x,y_0(x),y_0'(x)):I\to D\subset\mathbb{R}^3$$

este continuă, rezultă că mulțimea $K=\{(x,y_0(x),y_0'(x));x\in I\}\subset D$ este compactă. Fie $r=d(x,\complement D)=\inf\{d(M,N);M\in K,N\in\complement D\}$. Deoarece $K\cap\complement D=\varnothing$, K este compactă şi $\complement D$ este închisă, rezultă că $r>0$ (vezi [8], Teorema 5.2.1, pag. 100). Vom arăta că $B(y_0;\frac{r}{2})\subset\mathcal{D}$, de unde va rezulta că $\mathcal{D}$ este o mulțime deschisă. Fie $y\in B(y_0;\frac{r}{2})$. Atunci

$$\|y-y_0\|=\sup_{x\in I}|y(x)-y_0(x)|+\sup_{x\in I}|y'(x)-y_0'(x)|<\frac{r}{2}.$$

În particular, avem

$$|y(x)-y_0(x)|+|y'(x)-y_0'(x)|<\frac{r}{2},\ \forall x\in I\ . \tag{2}$$

Fie $x\in I$ oarecare fixat, $M(x,y_0(x),y_0'(x))\in K$ şi $P(x,y(x),y'(x))$. Avem

$$d(M,P)=\sqrt{(y(x)-y_0(x))^2+(y'(x)-y_0'(x))^2}\le|y(x)-y_0(x)|+|y'(x)-y_0'(x)|<\frac{r}{2}.$$

Cum $d(P,K)\le d(P,M)$, rezultă că $d(P,K)<\frac{r}{2}$. Din această ultimă inegalitate deducem că $P\in D$, pentru că, în caz contrar, $P\in\complement D$ şi $d(P,K)\ge d(\complement D,K)=r$, ceea ce este absurd.

În definitiv, am arătat că dacă $y\in B(y_0;\frac{r}{2})$, atunci $(x,y(x),y'(x))\in D$, $\forall x\in I$, deci $y\in\mathcal{D}$. Cu aceasta, lema este demonstrată. ■

Ne punem problema determinării funcțiilor din $\mathcal{D}$ care realizează un extrem al funcționalei (1) pe această mulțime. Conform teoremei lui Fermat, dacă $y_0\in\mathcal{D}$ realizează un extrem al funcționalei (1) pe $\mathcal{D}$, atunci, în mod necesar

$$\delta_h \mathcal{F}(y_0)=0,\ \forall h \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}).$$

În practică se pune problema determinării punctelor de extrem ale funcționalei (1) *cu capete fixe*. În acest caz, fie $c,d \in \mathbb{R}$ numere date şi

$$\mathcal{A} = \{y \in \mathcal{D} \mid y(a)=c,\ y(b)=d\},$$

cunoscută sub numele de *mulțimea funcțiilor admisibile* ale problemei. Este uşor de constatat că, dacă se cunoaşte o funcție $y_0 \in \mathcal{A}$, atunci orice altă funcție $y \in \mathcal{A}$ este de forma $y = y_0 + h$, unde $h(a)=h(b)=0$. Prin urmare, dacă $y_0 \in \mathcal{A}$ realizează un extrem al funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor admisibile, atunci, în mod necesar

$$\delta_h \mathcal{F}(y_0)=0,\ \forall h \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}),\ h(a)=h(b)=0.$$

Pentru rezolvarea problemelor de extrem pentru funcționala (1) este util următorul rezultat.

Lema 4.3.2. (Lema fundamentală a calculului variațional). (Lagrange). *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $[a,b]$, cu $h(a)=h(b)=0$, satisface condiția*

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

Atunci $f(x)=0$, pentru orice $x\in[a,b]$.

Demonstrație. Funcția f fiind continuă, este suficient să arătăm că $f(x)=0$, pentru orice $x\in(a,b)$. Presupunem, prin absurd, că f nu este identic nulă pe (a,b), deci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)\neq 0$. Fără micşorarea generalității, putem presupune că $f(c)>0$. Funcția f fiind continuă în punctul c, pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ suficient de mic, astfel încât $J=[c-\delta,c+\delta]\subset(a,b)$ şi pentru orice $x\in J$, avem $|f(x)-f(c)|\le\varepsilon$. Altfel spus, pentru orice $x\in J$ au loc inegalitățile $f(c)-\varepsilon\le f(x)\le f(c)+\varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon=\frac{1}{2}f(c)$ rezultă că există un interval corespunzător $J=[c-\delta,c+\delta]$ astfel încât pentru orice $x\in J$ avem $f(x)\ge\frac{1}{2}f(c)$. Fie funcția

$$h(x)=\begin{cases}(x-c+\delta)^2(x-c-\delta)^2, & \text{dacă } x\in J\\ 0, & \text{dacă } x\notin J\end{cases}.$$

Se verifică uşor că funcția h satisface condițiile din enunțul lemei. În plus, folosind teorema de medie, rezultă că

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x=\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)h(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{2}f(c)\int_{c-\delta}^{c+\delta} h(x)\mathrm{d}x=f(c)h(\xi)\delta>0,$$

unde $\xi\in(c-\delta,c+\delta)$, ceea ce contrazice (3). ■

Observația 4.3.1. Lema lui Lagrange rămâne valabilă dacă funcția h din enunțul lemei este o funcție de clasă $\mathcal{C}^k$, $k\ge 1$, pe $[a,b]$, care se anulează în a şi b împreună cu

derivatele sale până la ordinul $k-1$ inclusiv. Este suficient să luăm $h(x)=(x-c+\delta)^{2k}(x-c-\delta)^{2k}$, dacă $x\in J$.

Lema 4.3.3. (Du-Bois-Raymond). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție* $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, *de clasă* C^1 *pe* $[a,b]$, *cu* $h(a)=h(b)=0$, *satisface condiția*

$$\int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x=0. \tag{4}$$

Atunci funcția f *este constantă pe intervalul* $[a,b]$.

Demonstrație. Fie

$$h:[a,b]\to\mathbb{R},\ h(x)=\int_a^x (f(t)-c)\mathrm{d}t,$$

unde c este o constantă care se determină din condiția $h(b)=0$, deci

$$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Este clar că funcția h astfel construită este de clasă C^1 pe $[a,b]$, satisface condițiile $h(a)=h(b)=0$ și $h'(x)=f(x)-c$. Atunci

$$\int_a^b \left(f(x)-c\right)^2\mathrm{d}x=\int_a^b \left(f(x)-c\right)h'(x)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x-c\int_a^b h'(x)\mathrm{d}x=0-c[h(b)-h(a)]=0.$$

Integrantul fiind pozitiv și funcția f continuă, rezultă că $f(x)=c$, $\forall x\in[a,b]$. ■

Corolarul 1. *Dacă* $P,Q:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sunt funcții continue care satisfac*

$$\int_a^b [P(x)h(x)+Q(x)h'(x)]\mathrm{d}x=0$$

pentru orice funcție h *de clasă* C^1 *pe* $[a,b]$, *cu* $h(a)=h(b)=0$, *atunci funcția* Q *este derivabilă și* $Q'(x)=P(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

Demonstrație. Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_a^x P(t)\mathrm{d}t$. Această funcție este derivabilă și $f'(x)=P(x)$, $\forall x\in[a,b]$. Conform ipotezei, pentru orice funcție h de clasă C^1 pe $[a,b]$, cu $h(a)=h(b)=0$, avem

$$\int_a^b [f'(x)h(x)+Q(x)h'(x)]\mathrm{d}x=0,$$

de unde, integrând prin părți, obținem

$$\int_a^b Q(x)h'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f'(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x .$$

În consecință

$$\int_a^b [Q(x) - f(x)]h'(x)\mathrm{d}x = 0 .$$

Conform Lemei 4.3.3, rezultă că funcția $Q - f$ este constantă pe $[a,b]$, deci $Q'(x) = f'(x) = P(x)$, $\forall x \in [a,b]$. ■

Teorema 4.3.1. (Teorema lui Euler). *Fie* $D \subset \mathbb{R}^3$ *o mulțime deschisă,* $F : D \to \mathbb{R}$ *o funcție de clasă* $\mathcal{C}^1$, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ *și* $\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}) \mid (x, y(x), y'(x)) \in D,\ \forall x \in I\}$.

Fie, de asemenea, funcționala $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x ,\ \forall y \in \mathcal{D} .$$

Dacă funcția $y_0 \in \mathcal{A} = \{y \in \mathcal{D} \mid y(a) = c,\ y(b) = d\}$ *realizează un extrem al funcționalei* $\mathcal{F}$ *pe mulțimea funcțiilor admisibile* $\mathcal{A}$, *atunci funcția* $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ *este de clasă* $\mathcal{C}^1$ *pe* $[a,b]$ *și funcția* y_0 *verifică ecuația diferențială*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right). \tag{5}$$

Demonstrație. Fie h o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $[a,b]$, care satisface condițiile la limită $h(a) = 0$, $h(b) = 0$ și funcția $\varphi_h : \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}$, $\varphi_h(t) = \mathcal{F}(y_0 + th)$. Variația întâi a funcționalei $\mathcal{F}$ este $\delta_h\mathcal{F}(y_0) = \varphi_h'(0)$, deci

$$\delta_h\mathcal{F}(y_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\left(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)\right)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F\left(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)\right)\right)\Bigg|_{t=0}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x .$$

Conform teoremei lui Fermat, $\delta_h\mathcal{F}(y_0) = 0$, pentru orice funcție h de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $[a,b]$, care satisface $h(a) = 0$, $h(b) = 0$, deci

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x = 0 .$$

Concluzia teoremei rezultă din Corolarul 1. ■

Aşadar, teorema lui Euler ne dă o condiţie necesară de extrem, cu care problema poate fi complet rezolvată în multe cazuri. Problema condiţiilor suficiente de extrem depăşeşte cadrul acestui curs şi nu o vom aborda.

Ecuaţia diferenţială (5) se numeşte *ecuaţia lui Euler-Lagrange* asociată funcţionalei $\mathcal{F}$. Soluţiile ecuaţiei diferenţiale (5) se numesc *extremale*. Ele sunt susceptibile de a fi puncte de minim pentru funcţionala $\mathcal{F}$.

Observaţia 4.3.2. Dacă funcţia $F \in \mathcal{C}^2(D)$, derivând în raport cu x termenul drept al ecuaţiei (4), aceasta devine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

Rezultă că, dacă $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ nu este identic nulă, atunci ecuaţia diferenţială (4) este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, deci soluţia sa generală depinde de două constante arbitrare.

Aceste constante se determină folosind condiţia suplimentară a problemei: curba căutată trebuie să treacă prin două puncte date.

Exemplu. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12 y^2) \mathrm{d}x ,$$

care satisfac condiţiile la limită $y(1) = 1$, $y(2) = 8$.

În acest caz $F(x, y, y') = x^2 y'^2 + 12 y^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 24 y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2 y'$.

În consecinţă, ecuaţia Euler-Lagrange va fi

$$24 y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^2 y') = 0 \text{ sau } 24 y - 4xy' - 2x^2 y'' = 0 .$$

Se ajunge astfel la ecuaţia diferenţială de tip Euler

$$x^2 y'' + 2xy' - 12 y = 0 .$$

Facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi ţinem seama că $y' = e^{-t} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $y'' = e^{-2t} \left(\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)$. Atunci, ecuaţia diferenţială Euler se transformă în ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 12 y = 0 ,$$

care are soluţia $y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-4t}$. Prin urmare soluţia ecuaţiei diferenţiale Euler este $y(x) = C_1 x^3 + \dfrac{C_2}{x^4}$. Din condiţiile la limită obţinem $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Aşadar, extremala căutată este $y(x) = x^3$.

Observația 4.3.3. Să presupunem că $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \equiv 0$. Atunci funcția F este de forma

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'.$$

Ecuația lui Euler devine

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} y' - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} y' = 0,$$

adică

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6}$$

Dacă această relație este satisfăcută identic, atunci expresia de sub semnul integralei

$$[P(x, y) + Q(x, y)y']\mathrm{d}x = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

va fi o diferențială totală exactă, deci valoarea integralei depinde numai de capetele curbei, nu şi de drumul de integrare. În acest caz problema variațională nu are sens.

Dacă relația (6) nu este satisfăcută identic, atunci ea defineşte o curbă bine determinată, care, în general, nu va trece prin punctele date. În acest caz, problema variațională nu are soluție. În anumite cazuri particulare, relația (6) poate să dea soluția problemei de extrem pentru funcționala corespunzătoare.

Exemplu. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathcal{F}(y) = \int_1^2 (3x - y)y\,\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(1) = 1$, $y(2) = 8$.

În acest caz $F(x, y, y') = 3xy - y^2$, iar ecuația lui Euler devine $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, adică $3x - 2y = 0$. Prin urmare, $y(x) = \frac{3}{2}x$, care, în mod evident, nu satisface condițiile la limită.

Cazuri particulare ale ecuației lui Euler

1) *Funcția F nu depinde de y.*

În acest caz $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ şi ecuația lui Euler devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

deci

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \tag{7}$$

este o integrală primă pentru ecuația lui Euler.

Exemplu. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathcal{F}(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(1)=3$, $y(2)=5$.

În acest caz $F(x,y,y')=y'(1+x^2y')$, deci F nu depinde de y. Conform celor de mai sus, extremalele funcționalei satisfac ecuația (6), adică $1+2x^2y'=C$. Atunci $y'=\dfrac{C-1}{2x^2}$, de unde, prin integrare, găsim familia de hiperbole $y=\dfrac{C_1}{x}+C_2$. Constantele C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită. Obținem sistemul $C_1+C_2=3$, $\dfrac{1}{2}C_1+C_2=5$, care are soluțiile $C_1=-4$, $C_2=7$. Extremala căutată este $y(x)=7-\dfrac{4}{x}$.

2) *Funcția F nu depinde de x.*

În acest caz vom arăta că

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C \tag{8}$$

este o integrală primă pentru ecuația lui Euler.

Într-adevăr, deoarece $F=F(y,y')$ şi ținând seama de ecuația lui Euler, obținem succesiv:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''-\frac{\partial F}{\partial y'}y''-y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=$$
$$=y'\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)=0,$$

de unde rezultă (8).

Exemplu. Să se rezolve problema brachistocronei. Altfel spus, să se determine extremalele funcționalei

$$T\quad(y)=\int_0^a\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\,\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(0)=0$, $y(a)=b$.

În acest caz $F(x,y,y')=F(y,y')=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$. Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=\dfrac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$, din (8) obținem $\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\dfrac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=C$, care se mai scrie $\dfrac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=C$. Notând $k=\dfrac{1}{C^2}$, rezultă că

$$y=\frac{k}{1+y'^2}.$$

Punând $y' = \mathrm{ctg}t$, rezultă că $y = k\sin^2 t = \frac{k}{2}(1-\cos 2t)$. Atunci

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{k\sin 2t}{\mathrm{ctg}t} = 2k\sin^2 t\mathrm{d}t = k(1-\cos 2t)\mathrm{d}t.$$

Prin urmare

$$x = \frac{k}{2}(2t - \sin 2t) + k_1.$$

Aşadar, obținem curbele sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = \frac{k}{2}(2t-\sin 2t) + k_1 \\ y = \frac{k}{2}(1-\cos 2t) \end{cases} \tag{9}$$

constantele k şi k_1 fiind arbitrare şi se determină din condițiile la limită. Ecuațiile (9) reprezintă o familie de cicloide generate prin rostogolirea unui cerc de rază $\frac{k}{2}$ pe axa reală.

Punctele de întoarcere vor fi puncte de pe axa reală de abscise $x = k_1 + 2n\pi k$, $n \in \mathbb{Z}$.

Cum, prin ipoteză, curba căutată trece prin origine, va rezulta $k_1 = 0$. Constanta k se determină din condiția $y(a) = b$.

4.4. Funcționale de tipul $\mathcal{F}(y,z) = \int_a^b F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$

Fie $D \subset \mathbb{R}^5$ o mulțime deschisă, $F : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

De asemenea, fie

$$\mathcal{D} = \{(y,z) \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^2) \mid \big(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)\big) \in D,\ \forall x \in I\},$$

$y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ numere date şi

$$\mathcal{A} = \{(y,z) \in \mathcal{D} \mid y(a) = y_1,\ y(b) = y_2, z(a) = z_1, z(b) = z_2\}.$$

Considerăm funcționala $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(y,z) = \int_a^b F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Această funcțională depinde de F. Mulțimea $\mathcal{A}$ se numeşte *mulțimea funcțiilor admisibile.*

Teorema 4.4.1. *Dacă $(y,z) \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^2)$ realizează extremumul funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor admisibile, atunci funcțiile $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$, $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial z'}(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$ sunt de clasă $\mathcal{C}^1$, iar funcțiile y şi z verifică sistemul de ecuații diferențiale*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) \end{cases}. \tag{2}$$

Demonstrație. Fie $(g,h) \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^2)$ care satisface condițiile la limită $g(a)=0$, $g(b)=0$, $h(a)=0$, $h(b)=0$ şi funcția

$$\varphi_{(g,h)} : \left(-\frac{r}{\|(g,h)\|}, \frac{r}{\|(g,h)\|}\right) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{(g,h)}(t) = \mathcal{F}(y+tg, z+th).$$

Variația întâi a funcționalei (1) este $\delta_{(g,h)}\mathcal{F}(y,z) = \varphi'_{(g,h)}(0)$, deci

$$\delta_{(g,h)}\mathcal{F}(y,z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\big(x, y(x)+tg(x), y'(x)+tg'(x), z(x)+th(x), z'(x)+th'(x)\big)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F\big(x, y(x)+tg(x), y'(x)+tg'(x), z(x)+th(x), z'(x)+th'(x)\big)\Big)\Bigg|_{t=0}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot g'(x)\right]\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial z}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial z'}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Conform teoremei lui Fermat, $\delta_{(g,h)}\mathcal{F}(y,z) = 0$, pentru orice funcții g şi h de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $[a,b]$, care satisfac $g(a)=0$, $g(b)=0$, $h(a)=0$, $h(b)=0$.

În particular, scriind $\delta_{(g,h)}\mathcal{F}(y,z) = 0$ pentru $(g,0)$ respectiv $(0,h)$ şi ținând seama de (3), obținem:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot g'(x)\right]\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial z}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial z'}\big(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\big)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Concluzia teoremei rezultă din Corolarul 1. ■

Aşadar, Teorema 4.4.1 dă condiții necesare de extrem. Sistemul de ecuații diferențiale (2) se numeşte *sistemul Euler-Lagrange* asociat funcționalei (1). Curbele y şi z care satisfac sistemul (2) se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcționalei (1).

Observația 4.5.1. 1) Dacă funcția F nu depinde explicit de y sau z, atunci sistemul (2) admite, în mod evident, integralele prime

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \text{ respectiv } \frac{\partial F}{\partial z'} = C'.$$

2) Dacă funcția F nu depinde explicit de x, atunci sistemul (2) admite integrala primă

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C .$$

Într-adevăr,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F}{\partial z'}z'' -$$

$$-y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - z''\frac{\partial F}{\partial z'} - z'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0,$$

deoarece y şi z care satisfac sistemul Euler-Lagrange.

Exemplu. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathcal{F}\quad (y,z) = \int_0^{\pi} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\mathrm{d}x ,$$

care satisfac condițiile la limită $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $z(0) = 0$, $z(\pi) = 1$.

Deoarece $F(x, y, z, y', z') = 2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2$, sistemul Euler-Lagrange devine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2z - 4y - 2y'' = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 2y - 2z'' = 0 \end{cases}.$$

Din sistemul $y'' + 2y - z = 0$, $z'' + y = 0$, eliminând pe z, obținem ecuația diferențială $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, a cărei soluție generală este

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

Din condițiile $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, obținem $C_1 = 0$ şi $C_3 = -\dfrac{1}{\pi}$. În consecință

$$y(x) = C_2 \sin x + C_4 x \sin x - \frac{x}{\pi}\cos x .$$

Din prima ecuație a sistemului rezultă că

$$z(x) = C_2 \sin x + C_4(2\cos x + x\sin x) + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x) .$$

Folosind condițiile $z(0) = 0$, $z(\pi) = 1$, obținem $C_4 = 0$ şi C_2 arbitrar. În concluzie, curbele extremale căutate sunt:

$$y(x) = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi}\cos x ,$$

$$z(x) = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x) .$$

4.5. Funcționale de tipul $\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})\mathrm{d}x$

Procedând ca în secțiunea 4.3, vom aborda probleme ale calculului variațional, în care funcția de sub semnul integrală depinde nu numai de derivata de ordinul întâi, ci şi de derivatele de ordin superior. Probleme de acest tip apar des în teoria elasticității. Prezentăm, pe scurt, un exemplu. Să se determine forma axei unei grinzi încovoiate, cu anumite condiții la extremități. Această problemă revine la găsirea extremumului energiei potențiale a sistemului. Dar energia potențială a unei grinzi încovoiate depinde de curbură. Prin urmare, în această problemă se caută curbele extremale în cazul în care funcția de sub semnul integrală depinde de derivatele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea ale funcției necunoscute.

Fie $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi fie $\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ spațiul vectorial real al funcțiilor $y:I\to\mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^n$, înzestrat cu norma

$$\|y\|=\sup_{x\in I}|y(x)|+\sup_{x\in I}|y'(x)|+\dots+\sup_{x\in I}\left|y^{(n)}(x)\right|.$$

Dacă $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ este o funcție dată, de clasă $\mathcal{C}^1$, considerăm funcționala $\mathcal{F}:\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Problema pe care o vom aborda se enunță în modul următor. Dintre toate curbele $y\in\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$, care verifică condițiile la limită:

$$\begin{aligned}&y(a)=c_1,\ y'(a)=c_2,\dots,\ y^{(n-1)}(a)=c_n,\\&y(b)=d_1,\ y'(b)=d_2,\dots,\ y^{(n-1)}(b)=d_n,\end{aligned} \tag{2}$$

să se determine acea curbă de-a lungul căreia funcționala (1) realizează un extremum.

Se constată uşor că, dacă se cunoaşte o funcție $y_0\in\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ care verifică condițiile la limită (2), atunci orice altă funcție $y\in\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ care verifică, de asemenea, condițiile la limită (2), este de forma $y=y_0+h$, unde $h\in\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ satisface condițiile la limită:

$$\begin{aligned}&h(a)=0,\ h'(a)=0,\dots,\ h^{(n-1)}(a)=0,\\&h(b)=0,\ h'(b)=0,\dots,\ h^{(n-1)}(b)=0.\end{aligned} \tag{3}$$

Prin urmare, dacă $y_0\in\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ realizează un extrem al funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor din $\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ care satisfac condițiile la limită (2), atunci, în mod necesar

$$\delta_h\mathcal{F}(y_0)=0,$$

pentru orice $h\in\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ care satisface condițiile la limită (3).

Teorema 4.5.1. *Fie $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^{n+1}$. Dacă funcția $y\in\mathcal{C}^{2n}(I;\mathbb{R})$ realizează un extrem al funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor din $\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$, care satisfac condițiile la limită (2), atunci funcția y verifică ecuația diferențială*

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\dots+(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right). \tag{4}$$

Demonstrație. Vom arăta că funcționala (1) admite variația întâi în orice punct $y \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$, după direcția oricărui $h \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$. Într-adevăr

$$\delta_h \mathcal{F}(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\left(x, y+th, y'+th', \ldots, y^{(n)}+th^{(n)}\right)\mathrm{d}x \right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot h' + \frac{\partial F}{\partial y''}\cdot h'' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\cdot h^{(n)} \right]\mathrm{d}x .$$

Să presupunem acum că funcția h satisface condițiile la limită (3). Integrând prin părți, pentru orice k, $1 \le k \le n$, obținem

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\cdot h^{(k)}\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right)\cdot h^{(k-1)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right)\cdot h^{(k-2)}\mathrm{d}x = \ldots = (-1)^k \int_a^b \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right)\cdot h \,\mathrm{d}x .$$

În consecință, avem

$$\delta_h \mathcal{F}(y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) \right]\cdot h \,\mathrm{d}x .$$

Deoarece $\delta_h \mathcal{F}(y) = 0$ pentru orice funcție h de clasă $\mathcal{C}^n$ pe $[a,b]$, care satisface $h(a) = 0$, $h(b) = 0$, din lema fundamentală a calculului variațional rezultă că funcția y satisface ecuația diferențială (4). ■

Prin urmare Teorema lui 4.5.1 dă o condiție necesară de extrem. Ecuația diferențială (4) se numeşte *ecuația Euler-Poisson* asociată funcționalei (1). Soluțiile acestei ecuații se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcționalei (1).

Exemplu. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2)\mathrm{d}x ,$$

care satisfac condițiile la limită $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y(1) = \mathrm{ch}1$, $y'(0) = \mathrm{sh}1$.

În acest caz $F(x, y, y', y'') = 2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y' - 4y$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y - 2y'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$. În consecință, ecuația Euler-Poisson asociată funcționalei este $2y' - 4y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y - 2y') + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(2y'') = 0$ sau $y^{IV} + y'' - 2y = 0$. Ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale este $r^4 + r^2 - 2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = \mathrm{i}\sqrt{2}$, $r_4 = -\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Atunci soluția generală a ecuației Euler-Poisson va fi

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x .$$

Ținând seama de condițiile la limită, este util să scriem această soluție generală folosind funcțiile hiperbolice. Deoarece $e^x = \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x$ și $e^{-x} = \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x$, atunci, notând $k_1 = C_1 + C_2$, $k_2 = C_1 - C_2$, rezultă că soluția generală a ecuației Euler-Poisson se poate scrie sub forma

$$y(x) = k_1 \mathrm{ch}x + k_2 \mathrm{sh}x + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x .$$

Folosind condițiile la limită, ajungem la sistemul algebric liniar $k_1 + C_3 = 0$, $k_2 + \sqrt{2}C_4 = 0$, $k_1 \mathrm{ch}1 + k_2 \mathrm{sh}1 + C_3 \cos\sqrt{2} + C_4 \sin\sqrt{2} = \mathrm{ch}1$, $k_1 \mathrm{sh}1 + k_2 \mathrm{ch}1 - \sqrt{2}C_3 \sin\sqrt{2} + {}$ $+ \sqrt{2}C_4 \cos\sqrt{2} = \mathrm{sh}1$. Rezolvând acest sistem, obținem $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Prin urmare, extremala căutată este $y(x) = \mathrm{ch}x$.

4.6. Funcționale de tipul $\mathcal{F}(u) = \iint_D F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră este curba închisă, netedă pe porțiuni C, $U \subset \mathbb{R}^5$ o mulțime deschisă și $F : U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$. Fie

$$\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{C}^1(\bar{D};\mathbb{R}) \;\Big|\; \left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) \in U, \forall (x,y) \in \bar{D}\} .$$

Considerăm funcționala $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y , \tag{1}$$

Se poate demonstra că mulțimea $\mathcal{D}$ este o submulțime deschisă a spațiului normat $\mathcal{C}^1(\bar{D};\mathbb{R})$. Dacă g este o funcție dată pe curba C, fie

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{D} \;;\; u\big|_C = g\} .$$

Este clar că, dacă funcția $u_0 \in \mathcal{A}$ este cunoscută, atunci orice altă funcție $u \in \mathcal{A}$ este de forma $u = u_0 + h$, unde $h\big|_C = 0$.

Ne punem problema determinării punctelor de extrem ale funcționalei (1) pe mulțimea $\mathcal{A}$. Pentru rezolvarea acestei probleme sunt utile următoarele rezultate.

Lema 4.6.1. *Fie $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție h de clasă $\mathcal{C}^1$ pe o mulțime deschisă ce conține $\bar{D}$, cu $h\big|_C = 0$, satisface condiția*

$$\iint_D f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 . \tag{2}$$

Atunci $f(x,y) = 0$, pentru orice $(x,y) \in \bar{D}$.

Demonstrație. Funcția f fiind continuă, este suficient să arătăm că $f(x,y) = 0$, pentru orice $x \in D$. Presupunem, prin absurd, că f nu este identic nulă pe D, deci există $(a,b) \in D$ astfel încât $f(a,b) \neq 0$. Fără micşorarea generalității, presupunem că $f(a,b) > 0$.

Funcția f fiind continuă în punctul (a,b), pentru orice $\varepsilon > 0$ există $r > 0$ suficient de mic, astfel încât $V = B\big((a,b);r\big) \subset D$ şi pentru orice $(x,y) \in V$, avem $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$. Altfel spus, pentru orice $(x,y) \in V$ au loc inegalitățile $f(a,b) - \varepsilon < f(x,y) < f(a,b) + \varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a,b)$ rezultă că există o bilă corespunzătoare $V = B\big((a,b);r\big)$ astfel încât pentru orice $x \in V$ avem $f(x,y) > \frac{1}{2} f(a,b)$. Fie funcția

$$h(x,y) = \begin{cases} \left((x-a)^2 + (z-b)^2 - r^2\right)^2, & \text{dacă } x \in V \\ 0, & \text{dacă } x \notin V \end{cases}.$$

Se verifică uşor că funcția h satisface condițiile din enunțul lemei. În plus, folosind teorema de medie pentru integrala dublă, rezultă că

$$\iint_D f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_V f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y >$$

$$> \frac{1}{2} f(a,b) \iint_V h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} f(a,b) h(\overline{x},\overline{y}) \cdot \pi r^2 > 0,$$

unde $(\overline{x},\overline{y}) \in V$, ceea ce contrazice (2). ■

Corolarul 1. *Dacă $P : \overline{D} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, iar Q şi R sunt două funcții de clasă C^1 pe o mulțime deschisă care conține $\overline{D}$, care satisfac*

$$\iint_D [P(x,y)h(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + R(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{3}$$

pentru orice funcție h de clasă C^1 pe o mulțime deschisă ce conține $\overline{D}$, cu $h\big|_C = 0$, atunci

$$P(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial R}{\partial y}(x,y), \ \forall (x,y) \in \overline{D}.$$

Demonstrație. Deoarece

$$Q\frac{\partial h}{\partial x} + R\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(Qh) + \frac{\partial}{\partial y}(Rh) - \frac{\partial Q}{\partial x}h - \frac{\partial R}{\partial y}h,$$

rezultă că

$$\iint_D [Q\frac{\partial h}{\partial x} + R\frac{\partial h}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(Qh) + \frac{\partial}{\partial y}(Rh)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D [\frac{\partial Q}{\partial x}h + \frac{\partial R}{\partial y}h]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Conform formulei Green-Riemann şi ținând seama că $h\big|_C = 0$, rezultă

$$\iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(Qh) + \frac{\partial}{\partial y}(Rh)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C (-Rh)\mathrm{d}x + (Qh)\mathrm{d}y = 0.$$

Aşadar

$$\iint_D [Q\frac{\partial h}{\partial x} + R\frac{\partial h}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D [\frac{\partial Q}{\partial x}h + \frac{\partial R}{\partial y}h]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Înlocuind în (3), obținem

$$\iint_D [P(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial R}{\partial y}(x,y)]h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

pentru funcţie h de clasă $\mathcal{C}^1$, care satisface $h|_C = 0$. Corolarul rezultă din Lema 4.6.1. ■

Teorema 4.6.1. *Dacă funcţia $u \in \mathcal{A}$ realizează un extrem al funcţionalei (1) pe mulţimea funcţiilor admisibile, atunci funcţia u verifică ecuaţia cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0, \tag{4}$$

unde $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Demonstraţie. Fie h o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$, care satisface $h|_C = 0$ şi funcţia $\varphi_h : \left(-\dfrac{r}{\|h\|}, \dfrac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}$, $\varphi_h(t) = \mathcal{F}(u + th)$. Variaţia întâi a funcţionalei (1) este $\delta_h \mathcal{F}(u) = \varphi_h'(0)$, deci

$$\delta_h \mathcal{F}(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_D F\left(x, y, u + th, \frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + t\frac{\partial h}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \iint_D \frac{d}{dt}\left[F\left(x, y, u + th, \frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + t\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]\Bigg|_{t=0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Deoarece $\delta_h \mathcal{F}(u) = 0$ pentru orice funcţie h de clasă $\mathcal{C}^1$ care satisface $h|_C = 0$, obţinem că

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \ \forall h \in \mathcal{C}^1, \ h|_C = 0.$$

Teorema rezultă din Corolarul 1. ■

Şi în acest caz, Teorema 4.6.1 dă o condiţie necesară de extrem. Ecuaţia cu derivate parţiale (4) se numeşte *ecuaţia Euler-Ostrogradski* asociată funcţionalei (1). Soluţiile acestei ecuaţii se numesc *suprafeţe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcţionalei (1).

Exemplu. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră este curba închisă, netedă pe porţiuni C şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă dată. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathcal{F}(u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + 2fu)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

care satisfac $u|_C = g$, g fiind o funcţie dată pe curba C.

Deoarece $F(x, y, u, u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2 + 2fu$, avem

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2f\ , \ \frac{\partial F}{\partial u_x} = 2u_x\ , \ \frac{\partial F}{\partial u_y} = 2u_y\ ,$$

deci ecuația Euler-Ostrogradski este

$$2f - \frac{\partial}{\partial x}(2u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(2u_y) = 0\ ,$$

adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\ .$$

Prin urmare, problema determinării extremalelor funcționalei (5) conduce la rezolvarea problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\big|_C = g \end{cases}.$$